Obs: este exemplo é só pra mostrar como um problema assustador vira um diagrama pequeno! O problema assustador não vai ser importante, só o tipo de diagrama que a gente obtém.

Curvas que minimizam a energia?

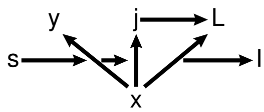
$x \to y$: curva. Digamos que $x \in [0,1]$; $\mathbf{E}_x = [0,1]$. $\mathbf{E}_y = \mathbb{R}$.

$j = (x, y, y')$. Uma curva $x \to y$ é levada numa curva $x \to j$. $\mathbf{E}_j = \mathbb{R}^3$.

$(x, y, y') \to L$: a função que queremos integrar; $\mathbf{E}_L = \mathbb{R}$. Por exemplo $L = y\sqrt{1 + y'^2}$ (energia potencial gravitacional de uma corda).

A composta $x \to (x, y, y') \to L$ é uma função $x \to L$, i.e., de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Integre; chame o resultado de I.

Parâmetro de tempo: s. Obtemos uma curva $s \to I$ e queremos saber derivar I com relação a s.



$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{s \quad s \to (x \to y)}{x \to y} \quad (x \to y) \to (x \to j)}{x \to j} \quad j \to L}{x \to L} \quad (x \to L) \to I}{I}$$

Duas interpretações: funcional e lógica.

Funcional: se eu tenho um s (um ponto de "tipo" s — um ponto do espaço dos 's's, $\mathbf{E}_s$) e uma função que leva 's's em '$x \to y$'s, i.e., um ponto de $\mathbf{E}_{s \to (x \to y)}$, eu tenho um $x \to y$.

Lógica: se s é verdade e "s implica 'x implica y' " é verdade então "x implica y" é verdade.

Vamos deixar a interpretação lógica pra daqui a pouco.

Dois modos de derivar: formalmente e via 'ϵ's e 'δ's.
Vamos começar com os ϵs e δs.
Problema mais simples: temos $f : x \to y$ e $g : y \to z$.

$$\dfrac{\dfrac{x \quad x \to y}{y} \qquad y \to z}{z} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{x \quad f}{f(x)} \quad g}{g(f(x))}$$

$$\dfrac{\dfrac{x_0 \quad x \to y}{y_0} \qquad y \to z}{z_0} \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{x_1 \quad x \to y}{y_1} \qquad y \to z}{z_1}$$

$$\dfrac{(x_0, x_1, x_2, \ldots) \quad \ldots}{(y_0, y_1, y_2, \ldots)}$$

Seria bom ter infinitesimais...
$x_1 \sim x_0$ é levado em $z_1 \sim z_0$.
$dx := x_1 - x_0$ infinitesimal
$dz := z_1 - z_0$ infinitesimal.
$\frac{dz}{dx}$ vai ser *quase* a derivada (erro infinitesimal).

Idéia: seqüências tendendo a zero como infinitesimais.
Idéia: objetos do universo novo são seqüências de objetos do universo antigo.
Objetos do universo antigo vão em seqüências constantes no universo novo.
O universo novo tem os objetos antigos e mais alguns novos.

$$\dfrac{\dfrac{(x_1, x_2, \ldots) \quad (f, f, \ldots)}{(y_1, y_2, \ldots)} \qquad (g, g, \ldots)}{(z_1, z_2, \ldots)}$$

Correção: queremos identificar seqüências que só difiram num conjunto finito de índices.

Pontos do universo novo são seqüências módulo uma relação de equivalência.

Tipos:
Tipos atômicos — $a, b, c, \ldots, \mathtt{n}, \mathtt{r}, \mathbb{z}, \mathbb{i}$.
Espaços associados: $\mathbf{E}_a, \mathbf{E}_b, \mathbf{E}_c, \ldots, \mathbf{E}_{\mathtt{n}}, \mathbf{E}_{\mathtt{r}}, \mathbf{E}_{\mathbb{z}}, \mathbf{E}_{\mathbb{i}}$.
$\mathbf{E}_{\mathtt{n}} = \mathbb{N}, \mathbf{E}_{\mathtt{r}} = \mathbb{R}, \mathbf{E}_{\mathbb{z}} = \mathbb{Z}, \mathbf{E}_{\mathbb{i}} = \mathbb{I}$.
Regras de formação de tipos: '$\to$'
α, β tipos $\Rightarrow \alpha \to \beta$ é um tipo.
$\mathbf{E}_{\alpha\to\beta}$ = conjunto de *todas* as funções de $\mathbf{E}_\alpha$ em $\mathbf{E}_\beta$.
$\mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$ = universo dos pontos tipados.
Cada ponto de $\mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$ vem junto com o seu tipo.
Dois pontos com tipos diferentes são diferentes. $2^{\mathtt{r}} \neq 2^{\mathtt{n}}$.

$\mathbb{I}$: conjunto índice. É bom começar pensando que $\mathbb{I} = \mathbb{N}$.
Seqüências de αs ("pré-hiper-αs") são funções de $\mathbb{I}$ em $\mathbf{E}_\alpha$.

$$\frac{\mathbb{i} \to x \quad \mathbb{i} \to (x \to y)}{\mathbb{i} \to y}$$

Duas seqüências são equivalentes se coincidem num conjunto *grande* de índices.
Alguns conjuntos de índices são grandes, outros não.
$\mathcal{F}$ é o conjunto dos conjuntos grandes. $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\mathbb{I})$.
$\mathcal{F}$ tem que ser um *filtro:*
se $A \in \mathcal{F}$ e $A \subset B \subset \mathbb{I}$ então $B \in \mathcal{F}$.
se $A, B \in \mathcal{F}$ então $A \cap B \in \mathcal{F}$.
$\varnothing \notin \mathcal{F}$ e $\mathbb{I} \in \mathcal{F}$.
Alguém maior que um grande é grande.
A interseção de dois grandes é grande.
O vazio é pequeno. O tudo é grande.
Pequenos são os que tem complemento grande.
Médios são os que não são grandes nem pequenos.

$\mathcal{N} = \{\, A \subset \mathbb{N} \mid A \text{ cofinito} \,\}$.
$\mathcal{N}$ é um filtro sobre $\mathbb{N}$.
O conjunto dos naturais pares é médio. O dos naturais ímpares também.
Comece pensando que $\mathcal{F} = \mathcal{N}$.

Outro filtro: o conjunto das vizinhanças de um ponto x_0 num espaço topológico X. (Filtro sobre X).
Outro: idem, mas tirando o x_0 de cada uma das vizinhanças; filtro sobre $X \backslash \{\, x_0 \,\}$. "Filtro das vizinhanças furadas de x_0".
$\mathcal{N}$ é o filtro de vizinhanças furadas do ∞ para uma certa topologia natural para $\mathbb{N} \cup \{\, \infty \,\}$.

$\mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$ universo *standard*.
$\mathbf{Set}^{\mathbb{I}}$ (abreviatura para $\mathbf{Set}^{\mathbb{I}}_{\mathcal{A}}$) ...
$\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$ (abreviatura para $(\mathbf{Set}^{\mathbb{I}}_{\mathcal{A}})/\mathcal{F}$) universo *não-standard* ou *semi-standard*.
Em $\mathbf{Set}^{\mathbb{I}}$: *pré-hiperpontos* (seqüências).
Em $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$: *hiperpontos* (seqüências módulo $\mathcal{F}$-igualdade).

Seja $a = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$. Compare a com ϵ standard > 0, digamos $\epsilon = 0.4$, que vira $(0.4, 0.4, \dots)$.
$\mathbf{E}_\tau$ é o espaço dos *valores de verdade*; $\mathbf{E}_\tau = \{\top, \dashv\}$.
O resultado da comparação é um (pré-)hipervalor de verdade: $(\dashv, \dashv, \top, \top, \dots)$ — verdadeiro em quase todo índice — $\mathcal{F}$-igual ao verdadeiro.
$a \leq \epsilon$ é $\mathcal{F}$-verdade (para todo $\epsilon > 0$ standard).

$$\frac{(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) \quad (0.4, 0.4, 0.4, \dots) \quad (<, <, <, \dots)}{(\dashv, \dashv, \top, \top, \top, \dots)}$$

$\mathbf{Set}^{\mathbb{I}}$: *pré-hiperpontos* (seqüências).
$\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$: *hiperpontos* (seqüências módulo $\mathcal{F}$-igualdade).
$\mathcal{U}$: não tem médios (caso particular de $\mathcal{F}$).

Em $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$ (com $\mathcal{F} = \mathcal{N}$) temos mais de dois hipervalores de verdade.

$(\top, \dashv, \top, \dashv, \ldots)$ não é nem $\mathcal{F}$-verdadeiro nem $\mathcal{F}$-falso (i.e., $\mathcal{F}$-igual ao falso). A culpa é dos conjuntos médios.

Um *ultrafiltro* é um filtro sem conjuntos médios. Quando $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro escrevemos $\mathcal{U}$ ao invés de $\mathcal{F}$. $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$.

Só dá pra obter um ultrafiltro explicitamente quando ele é "ditatorial" — um índice só decide tudo. Mas nesse caso $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}} = \mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$.

Todo filtro pode ser refinado a um ultrafiltro. Existe um ultrafiltro $\mathcal{U} \supset \mathcal{N}$ sobre $\mathbb{N}$ — os cofinitos são $\mathcal{U}$-grandes e os finitos são $\mathcal{U}$-pequenos. Os $\mathcal{F}$-médios ($\mathcal{N}$-médios) foram divididos entre grandes e pequenos.

Se $\mathcal{U}$ é não-ditatorial então todo espaço finito continua igual e todo espaço infinito ganha elementos não-standard.

Teorema da transferência: sentenças de 1ª ordem com quantificadores limitados e em que todas as constantes são standard são verdadeiras em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ se e só se são verdadeiras em $\mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$.

Em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ todo subconjunto não-vazio de $[0, \infty)$ tem inf.

Em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ o teorema de Fermat é verdadeiro.

Um espaço topológico compacto X em $\mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$ continua compacto em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[x]^1 \quad P}{P(x)} \qquad \dfrac{\dfrac{[x]^1 \quad \dfrac{y \quad f}{f(y)} \quad Q}{Q(x,f(y))} \quad \tau \xrightarrow{\neg} \tau}{\neg Q(x,f(y))} \qquad \tau,\tau \xrightarrow{\wedge} \tau}{P(x)\wedge\neg Q(x,f(y))}}{\lambda x.(P(x)\wedge\neg Q(x,f(y)))}\,1 \qquad (x\to\tau)\xrightarrow{\forall_x}\tau}{\forall x.(P(x)\wedge\neg Q(x,f(y)))}$$

Detalhe técnico: duas interpretações para os quantificadores.
Externa: igual à usual; só retorna $\top$ ou $\dashv$
Interna: aplicar a função $(x \to \tau) \to \tau$.
A interna corresponde a examinar cada índice em separado.
As duas coincidem em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$.

Def. (abuso de linguagem!!!):
se $X = \mathbf{E}_x$ é um espaço topológico e $x_0 \in X$ é o "ponto zero",
x_1 (um hiper-x) é um *infinitesimal* se está $\mathcal{F}$-dentro de toda vizinhança standard de x_0 — i.e., se a imagem inversa de toda vizinhança standard V_x por $\mathbb{i} \to x$ é um conjunto grande de índices.

Infinitesimais e continuidade:
f e x_0 são standard; $f : x \to y$ leva x_0 em y_0.
f é contínua em x_0 $\Rightarrow$ f leva infinitesimais em infinitesimais — i.e., se a imagem inversa de cada vizinhança de y_0 é um conjunto grande.
Dem:
$\mathbb{i} \to x \to y$
$I \leftarrow V_x \leftarrow V_y$

$\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ é muito parecido com $\mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$, mas os infinitesimais às vezes se comportam de modo não muito intuitivo e demonstrações em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ (i.e., em NSA) são difíceis de traduzir para convencionais.

Algo verdadeiro em $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$ é verdadeiro em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$; *algumas* demonstrações em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ valem em $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$. Idéia: demonstre em $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$, i.e., como se os hiperobjetos se comportassem exatamente como os objetos de $\mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$. Verifique se a demonstração continua valendo em $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$.

Demonstrações em $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$ são fáceis de traduzir para convencionais!:...

Infinitesimais naturais
$\mathbf{E}_x = X$ espaço topológico com ponto zero x_0.
$\mathbf{E}_y = Y$ espaço topológico com ponto zero y_0.
$f : x \to y$; x_0 vai em y_0.

$x \to y$ é contínua em x_0
$\iff$ $x \to y$ leva todo infinitesimal num infinitesimal ($\mathbb{I}$ e $\mathcal{F}$ não estão fixos!)
$\iff$ $x \to y$ leva o infinitesimal natural num infinitesimal.

Infinitesimal natural: $\mathbb{I} = X$; o filtro em $\mathbb{I}$ é o filtro das vizinhanças do x_0 (puxado pra $\mathbb{I}$); "identidade" $\mathtt{i} \to x$.

Exemplo: queremos ver que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$.
Troque n por $\omega_0 = (1,2,3,\dots)$ e veja que a diferença entre $(1+\frac{x}{\omega_0})^{\omega_0}$ e e^x é um infinitesimal.

$$\begin{aligned}
\log(1+x/\omega_0)^{\omega_0} &= \omega_0\ \log(1+x/\omega_0) \\
&= \omega_0\ (\log 1 + ((\log' 1) + \epsilon_1)\ x/\omega_0) \\
&= \omega_0\ (0 + (1+\epsilon_1)\ x/\omega_0) \\
&= \omega_0\ (1+\epsilon_1)\ x/\omega_0 \\
&= (1+\epsilon_1)\ x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+x/\omega_0)^{\omega_0} &= e^{((1+\epsilon_1)\ x)} \\
&= e^{(x+\epsilon_1 x)} \\
&= e^{(x+\epsilon_2)} \\
&= e^x + \epsilon_3.
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\omega_0 \quad \dots} \\
\quad \underline{\epsilon_1 \qquad \dots} \\
\qquad\quad \underline{\epsilon_2 \qquad\quad \dots} \\
\qquad\qquad\qquad \epsilon_3
\end{array}$$

Moral: $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$ é bom, mas a lógica dele é estranha.

Demonstrações *construtivas* com infinitesimais devem ter traduções melhores para o universo convencional que as não-construtivas.

A lógica clássica se importa demais com *verdades* e de menos com *demonstrações*. Intuicionismo...

Como subornar um matemático clássico:
* vamos poder usar infinitesimais
* vamos poder fazer provas-rabisco parecidas com árvores de dedução; as técnicas para manipular as árvores vão ser roubadas/recicladas das de sistemas dedutivos e teoria da prova
* lógicas mais fracas têm mais modelos. Alguns podem ser perfeitos para funções suaves e derivadas

Regras de formação de tipos:

$\mathbf{E}_{\alpha\to\beta} = \{\,$funções de $\mathbf{E}_\alpha$ em $\mathbf{E}_\beta\,\}$
$\mathbf{E}_{\alpha\land\beta} = \mathbf{E}_\alpha \times \mathbf{E}_\beta = \{\,(\alpha,\beta)\,\}$
$\mathbf{E}_{\alpha\lor\beta} =$ uma união *disjunta* de $\mathbf{E}_\alpha$ e $\mathbf{E}_\beta$: um $\alpha\lor\beta$ é ou um $(\mathcal{L},\alpha)$ ou um $(\mathcal{R},\beta)$.

$\mathbf{E}_\top = \{\,\top\,\}$
$\mathbf{E}_\bot = \varnothing$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{a\land b}{b} \quad \dfrac{a\land b}{a}}{b\land a} \qquad b\land a\to c}{c}}{c\lor d}$$

Uma árvore de tipos em que cada barra é a aplicação de uma das regras abaixo é uma dedução no sistema de dedução natural intuicionista (sem quantificadores).

$\dfrac{\alpha \quad \alpha \to \beta}{\beta}\,\to\mathrm{E}$	$\dfrac{\dfrac{[\alpha] \quad A}{\beta}}{\alpha \to \beta}\,\to\mathrm{I}$
$\dfrac{\alpha \land \beta}{\alpha}\,\land\mathrm{E}_1 \qquad \dfrac{\alpha \land \beta}{\beta}\,\land\mathrm{E}_2$	$\dfrac{\alpha \quad \beta}{\alpha \land \beta}\,\land\mathrm{I}$
$\dfrac{\alpha \lor \beta \quad \dfrac{[\alpha] \quad A}{\gamma} \quad \dfrac{[\beta] \quad B}{\gamma}}{\gamma}\,\lor\mathrm{E}$	$\dfrac{\alpha}{\alpha \lor \beta}\,\lor\mathrm{I}_1 \qquad \dfrac{\beta}{\alpha \lor \beta}\,\lor\mathrm{I}_2$
$\dfrac{\bot}{\alpha}\,\bot\mathrm{E}$	
	$\dfrac{}{\top}\,\top\mathrm{I}$

Esse sistema tem certas regras de *redução* que transformam deduções em outras "equivalentes": o tipo da raiz continua o mesmo — e o valor associado a ele na interpretação funcional também!

Sabemos aplicar essas reduções até levar a dedução a uma forma normal (que é única). Isso nos ensina a normalizar *construções que podem ser interpretadas como deduções*, e portanto nos dá uma técnica para ver se duas construções dão o mesmo resultado.

Aquele sistema é equivalente (no sentido de que deduções em um podem ser traduzidas para deduções em outro sem mudar o valor do resultado na interpretação funcional) a esse aqui, em que uma dedução também pode ser interpretada como "construções" de morfismos a partir de outros em certas categorias (categorias cartesianas fechadas).

$$\frac{}{\alpha \to \alpha}\,\mathrm{id} \qquad \frac{\alpha \to \beta \quad \beta \to \gamma}{\alpha \to \gamma}\,\circ$$

$$\frac{}{\alpha \to \top}\,\top_{\mathrm{CCC}} \qquad \frac{}{\bot \to \alpha}\,\bot_{\mathrm{CCC}}$$

$$\frac{\alpha \to \beta \quad \alpha \to \gamma}{\alpha \to \beta \land \gamma}\,\land\mathrm{I}_{\mathrm{CCC}} \qquad \frac{}{\alpha \land \beta \to \alpha}\,\pi \qquad \frac{}{\alpha \land \beta \to \beta}\,\pi'$$

$$\frac{\alpha \to \gamma \quad \beta \to \gamma}{\alpha \lor \beta \to \gamma}\,\lor\mathrm{I}_{\mathrm{CCC}} \qquad \frac{}{\alpha \to \alpha \lor \beta}\,\kappa \qquad \frac{}{\beta \to \alpha \lor \beta}\,\kappa'$$

$$\frac{\alpha \land \beta \to \gamma}{\alpha \to (\beta \to \gamma)}\,\mathrm{cur} \qquad \frac{}{\alpha \land (\alpha \to \beta) \to \beta}\,\mathrm{ev}$$

Com esse sistema e a tradução entre ele e o outro aprendemos a interpretar cálculo proposicional intuicionista e λ-cálculo em certas categorias; com algumas modificações (não tão fáceis) chegamos a *topoi*, categorias em que sabemos interpretar lógica de primeira ordem (!!!) e "teoria dos conjuntos tipada" (!!!!!) intuicionisticamente (!!!!!!). $\mathbf{Set}$, $\mathbf{Set}_{\mathcal{A}}$, $\mathbf{Set}^{\mathbb{I}}$, $\mathbf{Set}^{\mathcal{F}}$, $\mathbf{Set}^{\mathcal{U}}$ são topoi.

Demonstrações-rabisco
Uma regra boa para a derivada (pontual) é

$$\dfrac{x_0 \quad x \to y \quad \ldots}{y_{x0}}\,D\ ,$$

mas a regra para encontrar uma inversa local para uma função que é um difeo local é ainda mais interessante para um exemplo rápido. Abaixo, ela, uma demonstração do teorema da formal local das submersões, $t \wedge (t \to x \wedge y) \to (x \to y)$, e uma do teorema da função implícita, $(x \wedge y) \wedge (x \wedge y \to f) \to (x \to y)$.

$$\dfrac{x \quad x \to y \quad \ldots}{y \to x}\,\mathrm{TFI}$$

$$\dfrac{\dfrac{t \qquad \dfrac{t \to x \wedge y}{t \to x}}{x \to t}\,\mathrm{TFI} \qquad t \to x \wedge y}{x \to y}$$

$$\dfrac{\dfrac{x \wedge y \quad x \wedge y \to f}{f} \qquad \dfrac{\dfrac{x \wedge y \quad \dfrac{x \wedge y \to f}{x \wedge y \to x \wedge f}}{x \wedge f \to x \wedge y}\,\mathrm{TFI}}{x \wedge f \to y}}{x \to y}$$

Mais uma demonstração-rabisco

$\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ são fluxos no espaço dos ps; sei segui-los (exponenciando-os) durante um tempo dt. Quando dt é infinitesimal tenho uma regra parecida com a da expansão em Taylor, que é como

$$\frac{(\langle 4\rangle w_0, \langle 3\rangle w_{x0}, \langle 2\rangle w_{xx0}, \langle 1\rangle w_{xxx0}, \langle 0\rangle w_{xxxx0}) \quad \langle 4\rangle dx}{\langle 4\rangle w_1}.$$

Digamos que eu quero seguir o fluxo $\mathcal{X}$ durante tempo dt; isso me leva de p_0 a p_1. Depois eu sigo $\mathcal{Y}$ durante tempo ds, e isso me leva de p_1 a p_2. Quero uma aproximação de ordem 2 para p_2. dt e ds são infinitesimais de ordem 1.

$$\dfrac{\dfrac{p_0 \quad p \to p_X \quad dt}{p_1} \qquad p \to p_Y \quad ds}{p_2}$$

$$\dfrac{\dfrac{\langle 2\rangle p_0 \quad (\langle 1\rangle p_{X0}, \langle 0\rangle p_{XX0}) \quad \langle 2\rangle dt}{\langle 2\rangle p_1} \qquad (\langle 1\rangle p_{Y1}, \langle 0\rangle p_{YY1}) \quad \langle 2\rangle ds}{\langle 2\rangle p_2}$$

$$\dfrac{\dfrac{(\langle 1\rangle p_{Y0}, \langle 0\rangle (p_Y)_{p0}) \qquad \dfrac{\langle 2\rangle p_0 \quad \langle 2\rangle p_1}{\langle 2\rangle d_{01}p}}{\langle 1\rangle p_{Y1}} \qquad \dfrac{\langle 0\rangle p_{YY0}}{\langle 0\rangle p_{YY1}}}{(\langle 1\rangle p_{Y1}, \langle 0\rangle p_{YY1})}$$